

Dominanzrelation und Vergleichsmatrix

- In vielen Fällen abstrahiert ein Bündelungsfunktion von dem tatsächlichen Präferenzprofil.
- **Dominanzrelation:** $a \succ b \iff |\{i \mid a \succ_i b\}| > |\{i \mid b \succ_i a\}|$
 - ▶ Die Dominanzrelation ist irreflexiv und antisymmetrisch.
 - ▶ Wenn es ungerade viele Wähler mit strikten Präferenzen gibt, ist sie außerdem vollständig.
 - ▶ Die Dominanzrelation kann als gerichteter Graph betrachtet werden.
- **Vergleichsmatrix M:** $m_{a,b} = |\{i \mid a \succ_i b\}|$
 - ▶ Die Vergleichsmatrix kann als gerichteter gewichteter Graph betrachtet werden.

Fishburn Klassifikation

- **C1**: Eine C1-Bündelungsfunktion hängt nur von der **Dominanzrelation** ab.
 - ▶ Beispiel: Copeland $CO(\succ) = \arg \max_{a \in A} (|\{b \in A \mid a \succ b\}| - |\{b \in A \mid b \succ a\}|)$
- **C2**: Eine C2-Bündelungsfunktion hängt nur von der **Vergleichsmatrix** ab und ist keine C1-Funktion.
 - ▶ Beispiel: Minimax $f(M) = \arg \max_{a \in A} \min_{b \in A} m_{a,b}$
 - ▶ Beispiel: Borda $f(M) = \arg \max_{a \in A} \sum_{b \in A} m_{a,b}$
- **C3**: Eine C3-Bündelungsfunktion ist weder eine C1- noch eine C2-Funktion.
 - ▶ Beispiel: Young (Entferne so wenig Wähler wie möglich, bis es einen Condorcet-Gewinner gibt)

Dominanzgraphen (I)

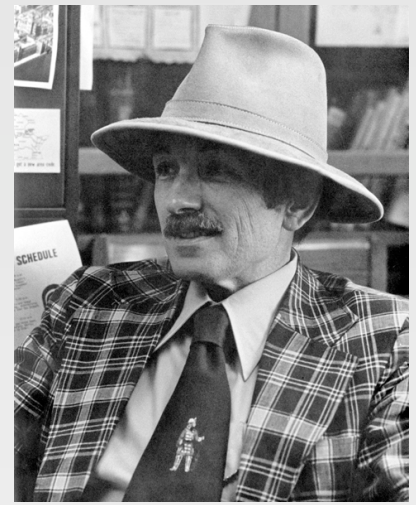
- Satz (McGarvey, 1953): Jeder gerichtete Graph tritt als Dominanzgraph eines Präferenzprofils auf.
 - ▶ Beweis: Tafel
 - ▶ Korollar: Jeder vollständige gerichtete Graph (“Turniergraph”) tritt als Dominanzgraph eines Präferenzprofils von ungerade vielen Wählern mit strikten Präferenzen auf.
- Def.: Ein Element ist ein **Maximum** wenn es alle anderen Elemente dominiert (vgl. Condorcet-Gewinner).
- Def.: Ein Element ist **maximal** wenn es undominiert ist.

Dominanzgraphen (2)

- Eine SCC wählt die “besten” Alternativen bezüglich der Dominanzrelation aus.
 - ▶ Problem: Dominanzrelation ist nicht kreisfrei.
- Diese Konzepte lassen sich auf verschiedenste Probleme anwenden:
 - ▶ Social choice theory
 - ▶ Argumentationstheorie
 - ▶ Sportliche Turniere (Schach, Fußball, etc.)
 - ▶ Kooperative Spieltheorie
 - ▶ Psychometrik
 - ▶ Webseitenbewertung
 - ▶ usw.

Die Good Menge

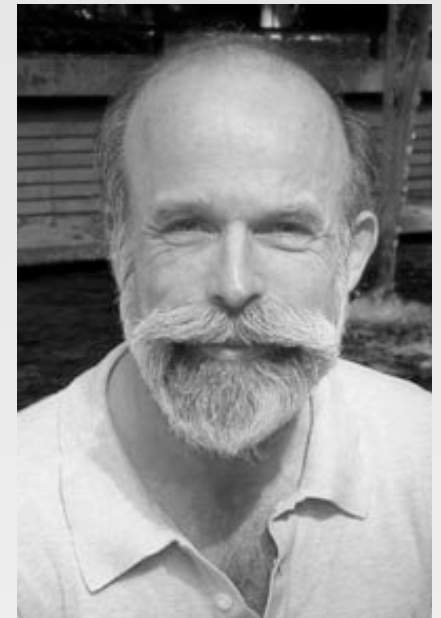
(Irving John Good, 1971)



- Def.: Eine Menge $S \subseteq A$ ist (stark) **dominant**, wenn für alle $a \in S$ und alle $b \in A \setminus S$ $a > b$ gilt.
 - ▶ Erweiterung des Condorcet-Konzepts auf Mengen
- Satz: In jedem Dominanzgraphen, gibt es genau eine nicht-leere dominante Menge, die keine dominante Menge enthält. Diese Menge heißt **Good Menge** $GO(>)$.
 - ▶ Minimale dominante Menge bezüglich Mengeninklusion
 - ▶ Beweis: Für zwei verschiedene dominante Mengen X, Y gilt entweder $X \subset Y$ oder $Y \subset X$.
- Wenn ein Condorcet-Gewinner existiert, enthält ihn die Good Menge als einziges Element.

Die Schwartz Menge

(Thomas Schwartz, 1972)



- Def.: Eine Menge $S \subseteq A$ ist (schwach) **undominiert**, wenn es für alle $a \in S$ keine $b \in A \setminus S$ gibt, so dass $b > a$.
 - ▶ Es kann mehrere minimale undominierte Mengen geben.
- Def.: Die **Schwartz Menge** $SC(>)$ eines Dominanzgraphen ist die Vereinigung seiner minimalen undominierten Mengen.
- Wenn ein Condorcet-Gewinner existiert, enthält ihn die Schwartz Menge als einziges Element.

Die Schwartz Menge (2)

- Beobachtungen
 - ▶ Die Schwartz Menge kann **einelementig** sein, ohne dass ein Condorcet-Gewinner existiert.
 - ▶ In **kreisfreien** Dominanzgraphen enthält die Schwartz Menge genau die undominierten (d.h. maximalen) Alternativen.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $SC(>) \subseteq GO(>)$.
 - ▶ Beweis: Tafel
- Satz: In **Turniergraphen** sind die Good Menge und die Schwartz Menge identisch.
 - ▶ Beweis: In Turniergraphen ist $SC(>)$ dominant. $GO(>)$ ist in jeder dominanten Menge enthalten, also folgt $GO(>) \subseteq SC(>)$ und mit Hilfe des obigen Satzes $GO(>) = SC(>)$.

Algorithmen

- Die Dominanzrelation kann in linearer Zeit aus dem Präferenzprofil gewonnen werden.
- Wir betrachten die **Adjazenzmatrix** U des Dominanzgraphen als Eingabe der Algorithmen.

$$u_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \succ b \\ -1 & \text{wenn } b \succ a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Komplexität untersuchen wir in Abhängigkeit von m (der Anzahl der Knoten bzw. Alternativen)
 - ▶ Hinweis: Die Eingabe ist bereits **quadratisch** in m .

Copeland Algorithmus

- Copeland Menge

- ▶ $CO(\succ) = \arg \max_{a \in A} (|\{b \in A \mid a \succ b\}| - |\{b \in A \mid b \succ a\}|)$

- ▶ Mit Hilfe der Adjazenzmatrix $CO(\succ) = \arg \max_{a \in A} \sum_{b \in A} u_{a,b}$

- Die Copeland Menge kann in $O(m^2)$ Zeit berechnet werden.

- ▶ Summiere die Elemente jeder Zeile und wähle die Alternativen, deren Zeilen die höchsten Summen haben.

Good Algorithmus

- Nehmen wir an, uns sei eine **Teilmenge S** der Good Menge bekannt. Dann müssen alle Alternativen, die nicht von allen Elementen aus S dominiert werden, auch zur Good Menge gehören.
 - ▶ Auf diese Weise erhalten wir eine (größere) Teilmenge der Good Menge.
 - ▶ Jede Alternative muss nur einmal betrachtet werden, denn nachdem ich sie zu S hinzugefügt habe, dominiert sie alle Alternativen außerhalb von S.
 - ▶ Für eine einelementige Startmenge hat dieser Algorithmus Laufzeit $O(m^2)$.
 - ▶ Man kann diesen Algorithmus m mal mit jeder Alternative als Startelement laufen lassen und erhält m dominante Mengen. Die kleinste dieser Mengen ist die Good Menge. Der resultierende Algorithmus hat die Komplexität **$O(m^3)$** .

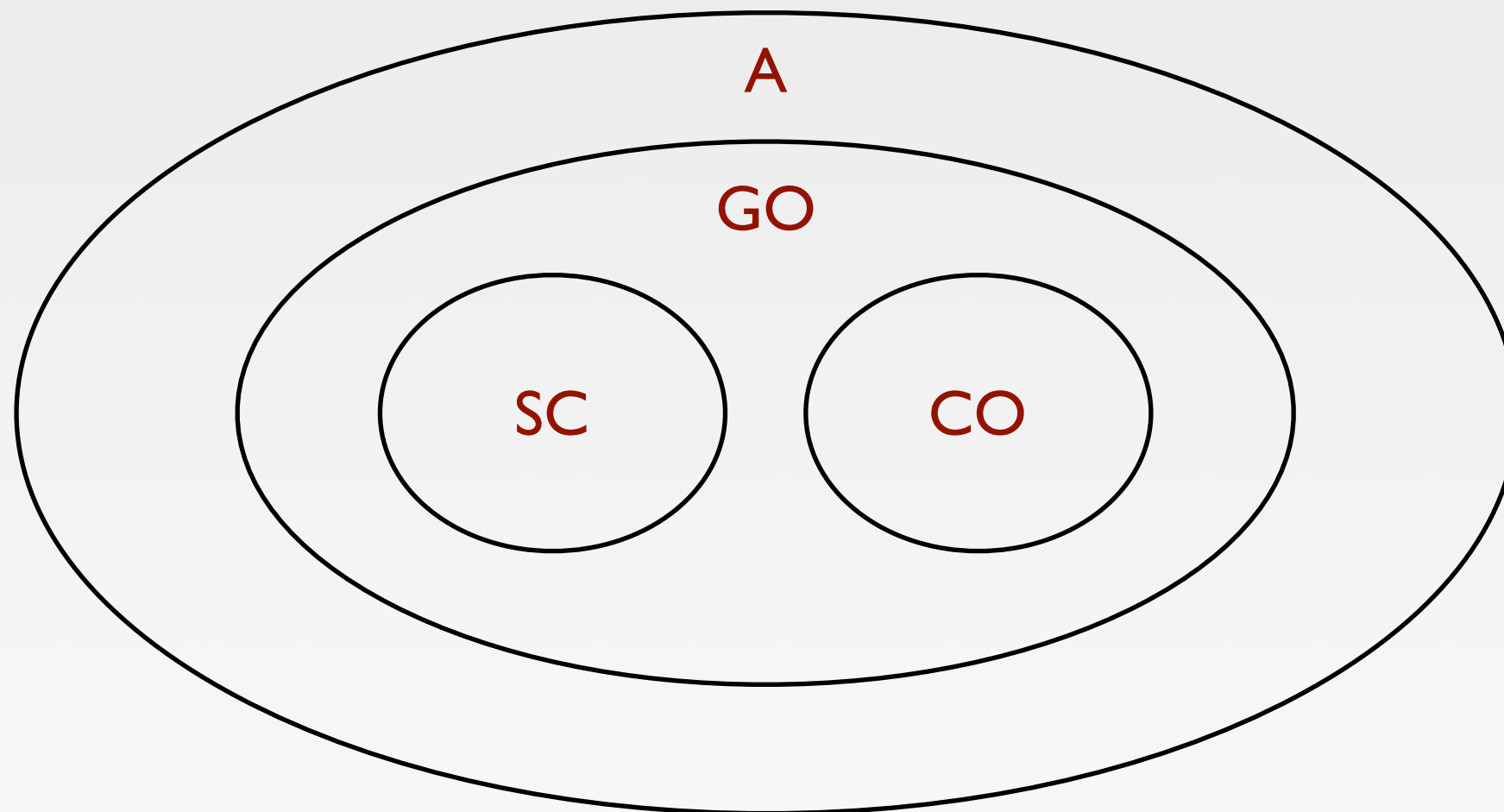
Good Algorithmus (2)

- Mit Hilfe des folgenden Satzes können wir die Komplexität des Good Algorithmus von $O(m^3)$ zu $O(m^2)$ verbessern.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $CO(>) \subseteq GO(>)$.
 - ▶ Beweis: Tafel
 - ▶ $D(a) = \{b \mid a \succ b\}$
 - ▶ $\overline{D}(a) = \{b \mid b \succ a\}$
- Es gibt Dominanzgraphen mit $CO(>) \cap SC(>) = \emptyset$.

Schwartz Algorithmus

- Satz (Deb, 1977): Die Schwartz Menge besteht genau aus den maximalen Elementen des asymmetrischen Teils der **transitiven Hülle** der Dominanzrelation.
 - ▶ Beweis: Tafel
- Es genügt die transitive Hülle der Dominanzrelation zu berechnen.
 - ▶ **Floyd-Warshall** Algorithmus (Zeitkomplexität $O(m^3)$)
- Die Schwartz Menge besteht aus den (schwach) undominierten starken Zusammenhangskomponenten des Dominanzgraphen.
 - ▶ Algorithmus von **Kosaraju** (Zeitkomplexität $O(m^2)$)

(Vorläufige) Ergebnisse: CI Condorcet-Verfahren



Copeland (1951)	CO	$O(m^2)$
Good (1971)	GO	$O(m^2)$
Schwartz (1972)	SC	$O(m^2)$